Emlékeztető

Eseményalgebra

De Morgan azonosságok: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$B_1, B_2 \ldots$ TELJES ESEMÉNYRENDSZER,
ha közülük pontosan egy bekövetkezik, azaz:
$B_1 \cup B_2 \cup \ldots = H$ és $i \neq j \rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$

Valószínűség: axiómák és néhány alaptulajdonság

$0 \leq \boldsymbol{P}(A) \leq 1$ $\boldsymbol{P}(\emptyset) = 0$ $\boldsymbol{P}(H) = 1$

$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B)$
$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B),$ *ha* A, B *kizárják egymást* $(A \cap B = \emptyset)$

$\boldsymbol{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$

$\boldsymbol{P}(A \setminus B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(A \cap B)$
$\boldsymbol{P}(A \setminus B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(B),$ *ha* B *része* A*-nak* $(B \subset A)$

Feltételes valószínűség: $\boldsymbol{P}(A|B) = \dfrac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(B)}$

Események függetlensége A, B független események:

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B) \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{P}(A|B) = \boldsymbol{P}(A) \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{P}(B|A) = \boldsymbol{P}(B)$$

Teljes valószínűség tétele ($B_1, B_2, \ldots B_n$ teljes eseményrendszer)

$$\boldsymbol{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(A|B_i) \cdot \boldsymbol{P}(B_i) = \boldsymbol{P}(A|B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1) + \ldots + \boldsymbol{P}(A|B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n)$$

Bayes tétel ($B_1, B_2, \ldots B_n$ teljes eseményrendszer)

$$\boldsymbol{P}(B_k|A) = \frac{\boldsymbol{P}(A|B_k) \cdot \boldsymbol{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(A|B_i) \cdot \boldsymbol{P}(B_i)} \qquad \left(= \frac{\boldsymbol{P}(A|B_k) \cdot \boldsymbol{P}(B_k)}{\boldsymbol{P}(A)}\right) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{P}(A|B_k) \cdot \boldsymbol{P}(B_k)}{\boldsymbol{P}(A|B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1) + \ldots + \boldsymbol{P}(A|B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n)}$$

(a nevező ugyanaz, mint a teljes valószínűség tételében)

Visszatevés nélküli mintavétel képlete: $\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Visszatevéses mintavételképlete: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Valószínűségszámítás

A sűrűség- és eloszlásfüggvény tulajdonságai

$$0 \le f(x) \quad \text{és} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \text{diszkrét eloszlásnál: } 0 \le p_i \quad \text{és} \quad \sum_i p_i = 1$$

$$F(x) = \boldsymbol{P}(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ balról folytonos, azaz: $\quad F(a) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x) \quad (a \in \mathbf{R})$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Várható érték és szórás

$$\mathbf{M}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \qquad \text{diszkrét eloszlásnál: } \mathbf{M}(\xi) = \sum_i x_i p_i$$

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}\left([\xi - \mathbf{M}(\xi)]^2\right) = \mathbf{M}\left(\xi^2\right) - \mathbf{M}^2(\xi)$$

$$\mathbf{M}(a\xi + b) = a\mathbf{M}(\xi) + b$$

$$\mathbf{D}(\xi)\, a\xi + b = |a|\,\mathbf{D}(\xi)$$

Markov-egyenlőtlenség

Ha az $\eta \ge 0$ valószínűségi változónak létezik a várható értéke akkor:

$$\boldsymbol{P}(\eta \ge t\,\mathbf{M}(\eta)) \le \frac{1}{t} \qquad (0 < t)$$

Csebisev-egyenlőtlenség

Ha a ξ valószínűségi változónak létezik a várható értéke és szórása, akkor:

$$\boldsymbol{P}(|\xi - \mathbf{M}(\xi)| \ge t\,\mathbf{D}(\xi)) \le \frac{1}{t^2}$$

Bernoulli tétele

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{\eta_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{pq}{n\varepsilon^2} \le \frac{1}{4n\varepsilon^2} \qquad (\varepsilon > 0 \quad q = 1 - p)$$

Diszkrét eloszlások

Karakterisztikus eloszlás

$$\xi \in \{0;1\} \qquad \boldsymbol{P}(\xi = 0) = p \qquad \boldsymbol{P}(\xi = 1) = 1 - p = q$$

$$\mathbf{M}(\xi) = p \qquad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{pq}$$

Diszkrét egyenletes eloszlás

$$\xi : x_1, x_2, \dots, x_n \qquad \boldsymbol{P}(\xi = x_i) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad \mathbf{D}^2(\xi) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2$$

Hipergeometrikus eloszlás

$$\xi \in \{0;1;\dots;n\} \qquad \boldsymbol{P}(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mathbf{M}(\xi) = n \cdot \frac{M}{N} \qquad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

Binomiális eloszlás

$$\xi : 0;1;\dots;n \qquad \boldsymbol{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (q = 1 - p)$$

$$\mathbf{M}(\xi) = np \qquad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{npq}$$

Poisson eloszlás

$\lambda > 0$ *paraméterrel*

$$\xi \in \mathbf{N} \qquad \boldsymbol{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \mathbf{M}(\xi) = \lambda \qquad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

$$\boldsymbol{P}(\xi < x) = F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Folytonos eloszlások

Egyenletes eloszlás

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha} \quad a \le x \le b \\ 1 & \text{ha} \quad b < x \end{cases}$$

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbf{D}(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Exponenciális eloszlás

$\lambda > 0$ *paraméterrel*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad 0 \le x \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad 0 \le x \end{cases}$$

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{D}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

Normális eloszlás

m *és* σ *paraméterekkel*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}t$$

$\mathbf{M}(\xi) = m \qquad \mathbf{D}(\xi)\,\xi = \sigma$

Standard normális eloszlás ($m = 0 \quad \sigma = 1$)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

matek.x3.hu

matek@x3.hu