Lineáris egyenletrendszerek megoldása Cramer-szabállyal

Lineáris egyenletrendszer (2×2) megoldása

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{array}{ll} a_{11}, \ldots, b_1, \ldots & \text{adott valós számok,} \\ x_1, x_2 & \text{az ismeretlenek.} \end{array}$$

Mátrixosan: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ahol $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Megoldás

Ha $det\ A = 0$ *(A szinguláris mátrix)*, akkor
az egyenletrendszernek nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van.

Ha $det\ A \neq 0$ akkor egyértelmű megoldás van, ami így számolható ki:
(Cramer-szabály)

$$x_1 = \frac{det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{det\ A} \qquad x_2 = \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{det\ A}$$

Determináns (2×2)

$$det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$$

Lineáris egyenletrendszer (3×3)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

$a_{11}, \ldots, b_1, \ldots$ adott valós számok,
x_1, x_2, x_3 az ismeretlenek.

Mátrixosan: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ahol $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Megoldás

Ha $\quad det\ A = 0 \quad$ (*A szinguláris mátrix)*, akkor
az egyenletrendszernek nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van.

Ha $\quad det\ A \neq 0 \quad$ akkor egyértelmű megoldás van, ami így számolható ki:
(Cramer-szabály)

$$x_1 = \frac{det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{det\ A} \qquad x_2 = \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{det\ A} \qquad x_3 = \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{det\ A}$$

Determináns (3×3)

$$det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \quad d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}d_{31} + d_{13}d_{21}d_{32} - d_{11}d_{23}d_{32} - d_{12}d_{21}d_{33} - d_{13}d_{22}d_{31}$$

---

matek.x3.hu

matek@x3.hu